50 Lecciones de Matemática

Prof. Evidio Quintana Fernández

Lecciones para la preparación
en concursos de matemática
y similares

La Habana
Cuba

Resumen

Este documento es una transcripción de las lecciones del profesor Evidio Quintana Fernández para la preparación de estudiantes de preuniversitario en concursos y similares de matemática.

Esto es un trabajo en progreso, puede cambiar y tener errores. Todo el trabajo y las colecciones aquí presentes son de la autoría del profesor Evidio.

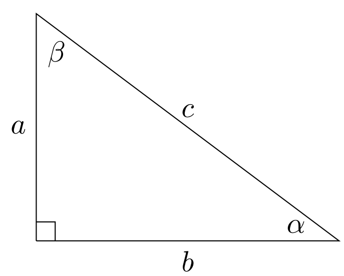
Mas información en https://github.com/jjavierdguezas/evidio-problemas-matematica. ¡Las contribuciones son bienvenidas!

Índice

50 Lecciones de Matemática

Lección #1 - Conozcamos al triángulo rectángulo

Cualquier estudiante de enseñanza media sabe que se trata de un triángulo que tiene un ángulo con amplitud 90°. Sin embargo no muchos saben la cantidad de relaciones que se generan en ese polígono. Dediquemos entonces un tiempo al estudio de este triángulo tan "generoso".



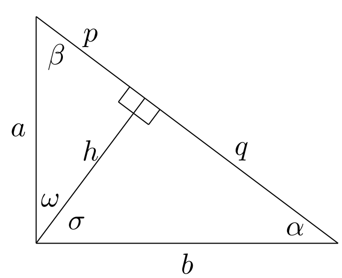
1) **Teorema de Pitágoras**

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2) **Razones Trigonométricas**

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

- Vea que basta conocer la longitud de dos lados o la amplitud de uno de los ángulos agudos y la longitud de uno de los tres lados para determinar el resto de los cinco elementos del triángulo.



3) **Grupo de Teoremas de Pitágoras**

3.1) $h^2 = p \cdot q$

3.2) $a^2 = c \cdot p$

$b^2 = c \cdot q$

3.3) $c^2 = a^2 + b^2$

- Es suficiente conocer la longitud de dos de los seis segmentos determinados, o uno de ellos y uno de los cuatro ángulos determinados para calcular el valor del resto de los diez elementos

Demostración de 3)

Sean $\triangle_1$, $\triangle_2$ y $\triangle_3$ de lados (a,h,p), (a,b,c) y (b,h,q) tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle_1 \sim \triangle_2 : \dfrac{a}{c} = \dfrac{h}{b} = \dfrac{p}{a} \Longrightarrow a^2 = c \cdot p \\ \triangle_2 \sim \triangle_3 : \dfrac{b}{c} = \dfrac{h}{a} = \dfrac{q}{b} \Longrightarrow b^2 = c \cdot q \end{array}\right\} \qquad \textbf{3.2) Teorema de los catetos}$$

$$\triangle_1 \sim \triangle_3 : \frac{a}{b} = \frac{h}{q} = \frac{p}{h} \Longrightarrow h^2 = p \cdot q \qquad \textbf{3.1) Teorema de la altura}$$

Sumando las dos ecuaciones obtenidas en 3.2:

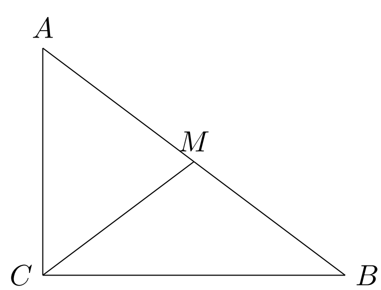
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c \cdot p + c \cdot q \\ &= c(p+q) \\ &= c \cdot c \\ &= c^2 \end{aligned} \qquad \textbf{3.3) Teorema de Pitágoras}$$

Vea además que el área del triángulo podemos expresarla como:

$$A = \frac{ab}{2} \text{ y } A = \frac{ch}{2} \Longrightarrow \frac{ab}{c} = h$$

Vea también que $\sigma = \beta$ y $\omega = \alpha$ por ser ángulos agudos con lados respectivamente perpendiculares

4)



Sea M punto medio de $\overline{AB}$

$\Longrightarrow \overline{AM} = \overline{MB} = \overline{CM}$

Teorema de la mediana de la hipotenusa

Demostración

·-) Sea $\overline{MH} \perp \overline{CB}$ en $H \Longrightarrow \overline{MH}$ es la paralela media de $\overline{AC}$
$\therefore \overline{MH}$ es altura y mediana de $\overline{BC}$ en $\triangle CMB$
o sea, $\triangle CMB$ es isósceles de base $\overline{CB}$, etc...

·-) Sea D un punto de la prolongación de $\overline{CM}$; $\overline{CM} = \overline{MD} \Longrightarrow ACBD$ es paralelogramo-rectángulo y $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{CM} = \overline{MD}$ por propiedades de un triángulo

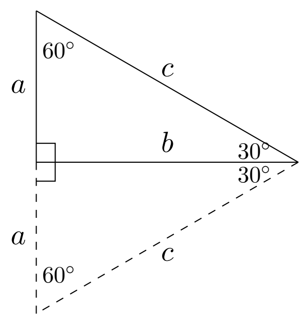
·-) M es circuncentro del $\triangle ABC \Longrightarrow \overline{AM} = \overline{MB} = \overline{MC} =$ radio de la circunferencia de centro M que pasa por A, B y C (recíproco del teorema de Tales)

5) En todo triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 30° tenemos:

i) El cateto opuesto al ángulo de 30° mide la longitud de la hipotenusa dividida por dos ($a = c \div 2$)

ii) El cateto adyacente al ángulo de 30° mide $\sqrt{3}$ veces la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° ($b = \sqrt{3}a$)

Demostración



Reflejando el triángulo dado de lados (a, b, c) sobre el cateto b obtengo un triángulo equilátero

$\Longrightarrow$ i) $a = \dfrac{c}{2}$

ii) $b = \sqrt{3}a$ (por Teo. de Pitágoras)

nota: De aquí se obtienen las razones trigonométricas de los ángulos 30° y 60°

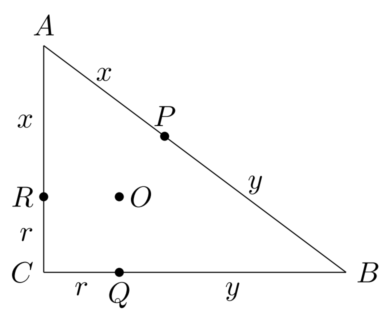
6) En todo triángulo rectángulo e isósceles tenemos:

La longitud de la hipotenusa es igual a $\sqrt{2}$ veces la longitud de los catetos ($c = \sqrt{2}s$)
Esto es resultado de aplicar teorema de Pitágoras con $a = b$

nota: de aquí se obtienen las razones trigonométricas del ángulo de 45°

* 7) En todo triángulo rectángulo, la suma de la longitud del inradio y el circunradio es igual a la media aritmética de los catetos.

Demostración



Sean P, Q, R puntos de tangencia del incírculo del $\triangle ABC$ con los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, tenemos:

$$\overline{AR} = \overline{AP} = x$$

$$\overline{RC} = \overline{CQ} = r \text{ (inradio)}$$

$$\overline{PB} = \overline{QB} = y$$

$$\Longrightarrow a = \overline{CQ} + \overline{QB} = r + y$$

$$b = \overline{AR} + \overline{RC} = x + r$$

$$c = \overline{AP} + \overline{PB} = x + y = \text{diámetro del circuncírculo}$$

$$\Longrightarrow a + b = r + y + x + r = 2R + 2r$$

$$\Longrightarrow r + R = \frac{a+b}{2}$$

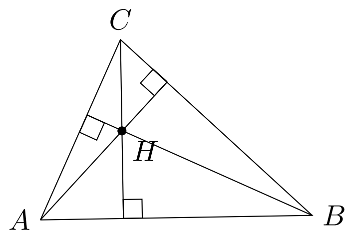
8) , 9). 10), ... pueden ser sugerencias de los lectores a este humilde trabajo.

Lección #2 - Rectas y Puntos Notables

Presta mucha atención a estas notas, de seguro aprenderás cosas muy novedosas que servirán para elevar tu cultura matemática.

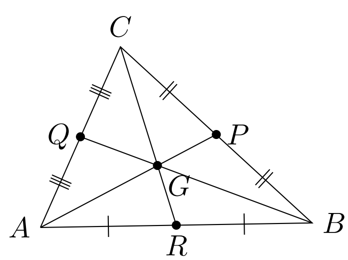
i) En todo triángulo hay para cada lado una altura, una mediana, una mediatriz y para cada ángulo una bisectriz. cada una de estas rectas concurren en un punto llamado: ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro (H, G, T, I)

·- alturas



Segmentos que "parten" de cada vértice y "caen" perpendicularmente en los lados opuestos. Vemos que H es un pinto interior del triángulo si este es acutángulo, pero si es un triángulo obtusángulo entonces H es un punto exterior y si el triángulo es rectángulo entonces H coincide con el vértice del ángulo recto

·- medianas



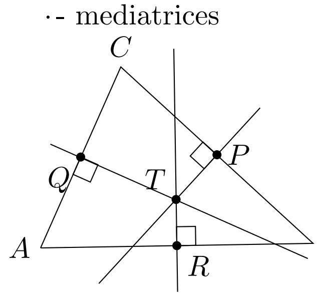
Segmentos que "parten" de cada vértice y "caen" en el punto medio de cada lado. Vemos que G siempre va a ser un punto interior del triángulo

* - $\overline{AG} = 2\overline{GP}$, $\overline{BG} = 2\overline{GQ}$, $\overline{CG} = 2\overline{GR}$

- $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RP}$ son las paralelas medias de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ respectivamente

* - Los $\triangle AGR$, $\triangle BGR$, $\triangle BGP$, $\triangle CGP$, $\triangle CGQ$ y $\triangle AGQ$ tienen la misma área

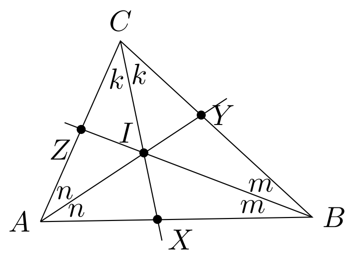
·- mediatrices



Rectas perpendiculares a cada lado que pasan por el punto medio de cada lado. Vemos que T es un punto interior del triángulo si este es acutángulo, pero si es obtusángulo entonces T es un punto exterior y si el triángulo es rectángulo entonces T coincide con el punto medio de la hipotenusa

- T coincide con el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo
- $\overline{GH} = 2\overline{GT}$ (recuerda que G es el baricentro y H el ortocentro)
- Los puntos H, G, T son alineados (Recta de Euler)
- Todo punto situado en la mediatriz de cualquier lado equidista de los extremos del lado

·- bisectrices



Son rectas que dividen a cada ángulo del triángulo en dos ángulos de igual amplitud. vemos que I siempre va a ser un punto interior del triángulo

* - I coincide con el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo

* - $\overline{CX}^2 = \overline{AC}\cdot\overline{CB} - \overline{AX}\cdot\overline{XB}$, análogamente para $\overline{AY}$ y $\overline{BZ}$

* - $\overline{AI} : \overline{BI} = \overline{AX} : \overline{BX}$, $\overline{BI} : \overline{CI} = \overline{BY} : \overline{CY}$, $\overline{CI} : \overline{AI} = \overline{CZ} : \overline{AZ}$

* - Todo punto situado en la bisetriz de cualquier ángulo equidista de los lados que determinan al ángulo

2) Particularidades importantes

Vea que los cuatro putos y 4 rectas notables no tienen porqué coincidir pero en un triángulo isósceles, las 4 rectas notables referidas a las base coinciden y los cuatro pintos notables serían puntos alineados sobre ellas.

Ahora el triángulo equilátero "esconde" otras "cositas" que hacen de él un polígono muy interesante, veamos...

- Para cada lado las cuatro rectas notables coinciden
- Los cuatro pntos notables coinciden también

Esto genera resultados a destacar, veamos...

$$\begin{aligned} \text{Sean } a &\to \text{longitud de los lados} \\ h &\to \text{altura de los lados} \\ S &\to \text{área del triángulo} \\ r &\to \text{radio de la circunferencia inscrita} \\ R &\to \text{radio de la circunferencia circunscrita} \end{aligned}$$

$$* \Longrightarrow \qquad h = R + r \qquad R = 2r \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \qquad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Vea que es suficiente conocer cualesquiera dos de estas variables para poder conocer el valor de las otras 3.

Otras notas de interés

* - Sean b_a, b_b, b_c $\to$ longitud de las bisectrices de a, b y c y $p \to$ semiperímetro del triángulo

$\Longrightarrow b_a = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bc(p-a)}$ y así con b_b y b_c

* - Sean m_a, m_b m_c $\to$ longitud de las medianas de los lados a, b y c

$\Longrightarrow m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$ y así con m_b y m_c

* - Sean h_a, h_b, $h_c \rightarrow$ longitud de las alturas de los lados$a$, b y c

$\Longrightarrow h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)}$ y así con h_b y h_c

* - Sean K circuncentro, I incentro, R circunradio y r inradio

$\Longrightarrow (KI)^2 = R^2 - 2Rr$ (fórmula de Euler)

* - Simedianas de un triángulo: En $\triangle ABC$: $\overline{AM}$ mediana, $\overline{AD}$ bisectriz $\Longrightarrow$ $\overline{AX}$ es simediana de $\overline{BC}$ si $\overline{AD}$ biseca al $\measuredangle XAM$ y se cumple:

$\dfrac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$ El punto donde las tres simedianas se cortan se llama Punto de Lemoine

* - Los segmentos trazados desde cada vértice de un triángulo dado con el vértice más alejado del triángulo equilátero trazado exteriormente a dicho triángulo sobre el lado opuesto al triángulo dado son iguales. Estos tres segmentos se cortan en un punto llamado: Punto de Fermat

4, 5, 6, ... pueden ser sugerencias de los amigos de la matemática a estos temas

Las notas marcadas con * deben ser demostradas

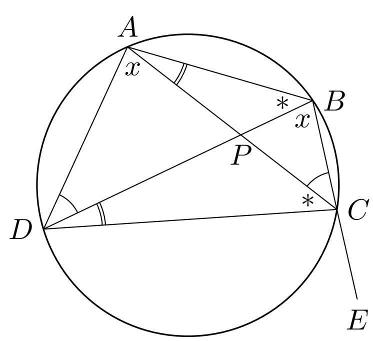
Lección #3 - Circunferencia y Cuadrilátero

Antes de proseguir quiero señalar que esto no es un compendio sobre temas de nuestra enseñanza, mi mayor anhelo es colaborar con la cultura matemática sobre todo con notas poco publicadas y que sean muy interesantes...

1) Ya vimos que en todo triángulo puede inscribirse y circunscribirse una circunferencia. Sin embargo este privilegio no lo poseen los cuadriláteros. Para que una circunferencia pueda circunscribirse en un cuadrilátero $ABCD$ tiene que cumplirse que los ángulos opuestos sean suplementarios ($\measuredangle A + \measuredangle C = 180°$, $\measuredangle B + \measuredangle D = 180°$), este cuadrilátero es llamado Cuadrilátero Cíclico (CC).

y para que pueda ser inscrito tiene que cumplir que $\overline{AB}+\overline{CD} = \overline{BC}+\overline{DA}$ (Teorema de Pitot).

Conocer esto es muy ventajoso, pues veamos...



Sea $ABCD$ un CC tal que sus diagonales se cortan en $P \Longrightarrow$

i ·- $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$, $\measuredangle DBC = \measuredangle DAC$, etc

ii ·- $\measuredangle DAB = \measuredangle DCE$ (siendo B, C y E alineados)

iii ·- $\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{DP} \cdot \overline{PB}$ (potencia de un punto PP)

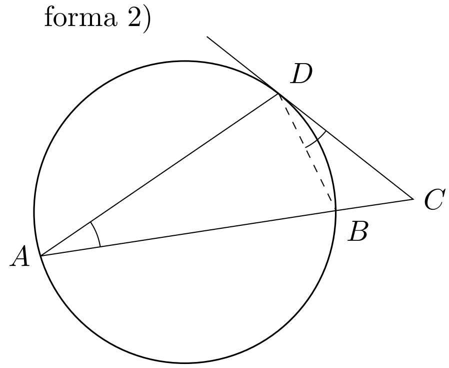
iv ·- $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA} = \overline{AC}\cdot\overline{BD}$ (Teorema de Ptolomeo)

v ·- $A_{ABCD} = \sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)(\rho-d)}$
(ρ semiperímetro)

y muchas otras relaciones, y como sabemos, la Geometría es el arte de relacionar elementos de las figuras presentadas.

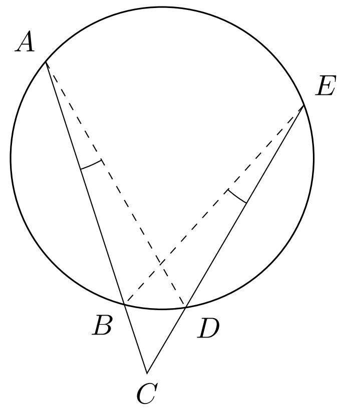
2) Potencia de un punto: Puede presentarse de varias formas, ver que en 1.iii $\triangle APB \sim \triangle CPD$, esta sería la primera forma.

forma 2)



Si $\overline{CD}$ tangente en D
$\Longrightarrow \overline{DC}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC}$
Vea que $\triangle ACD \sim \triangle DBC$

forma 3)

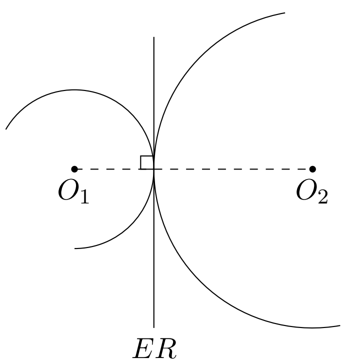


$\overline{CE} \cdot \overline{DC} = \overline{CA} \cdot \overline{BC}$
Vea que $\triangle ACD \sim \triangle BCE$

3) Eje radical de dos circunferencias (ER)
Veamos las formas de presentarse

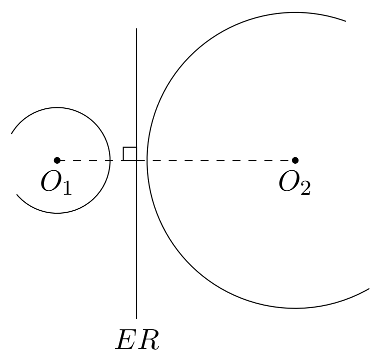
forma 1

Circunferencias Tangentes
Externas



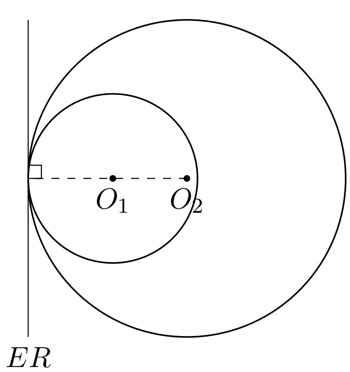
forma 2

Circunferencias
Exteriores



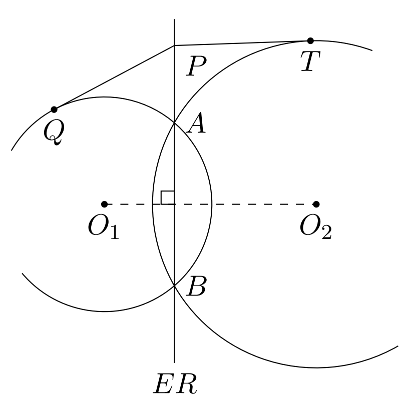
forma 3

Circunferencias Tangentes
Interiores



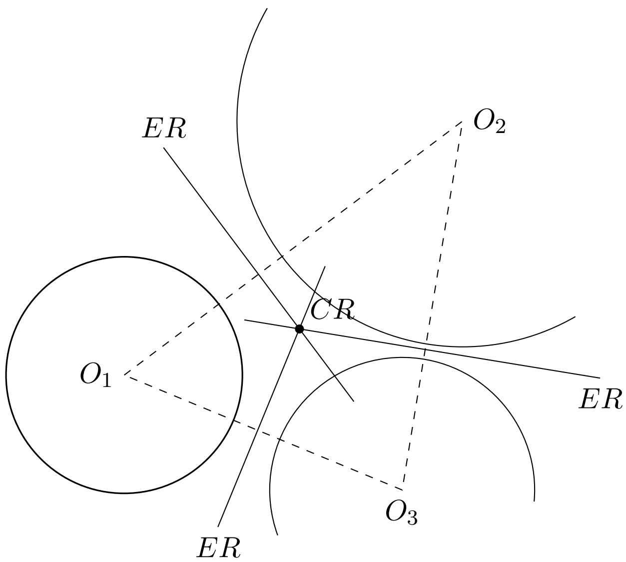
forma 4

Circunferencias
Secantes



En cada forma vemos que $ER \perp O_1O_2$, pero lo más destacado es que: Todo punto situado en el ER tiene la misma potencia respecto a ambas circunferencias. Vea como ejemplo en la forma 4 $\overline{PQ}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PA} = \overline{PT}^2$, siendo $\overline{PQ}$ y $\overline{PT}$ tangentes.

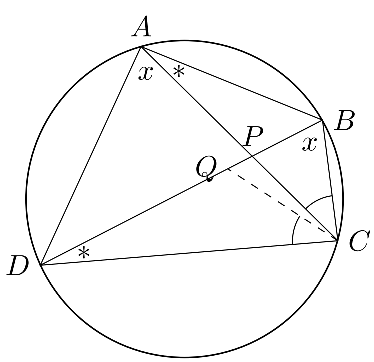
4) Centro radical de 3 circunferencias (CR).



Es el punto donde concurren los tres ER

5) Teorema de Ptolomeo

Como vimos en 1.iv, en todo CC el producto de las diagonales es igual a la suma del producto de los lados opuestos.



$\overline{DB} \cdot \overline{CA} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA}$, demostración

Sean $Q \in \overline{DP}$; $\measuredangle DCQ = \measuredangle PCB$, tenemos:

$$\triangle DCQ \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\overline{DQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \quad ①$$

$$\triangle DAC \sim \triangle BCQ \Rightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad ②$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{de ①} & \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{DQ} \cdot \overline{AC} \\ \text{de ②} & \overline{BC} \cdot \overline{DA} = \overline{QB} \cdot \overline{AC} \end{array}\right\} \text{sumando obtenemos lo deseado}$$

nota: Una pincelada muy bonita relacionada con esto se presenta de la siguiente forma: Si $\triangle ABC$ equilátero está inscrito en una circunferencia y $D \in \overset{\frown}{AC} \Longrightarrow \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{BD}$ (Teorema de Pompello)

6, 7, 8 ... pueden ser sugerencias de nuestros amigos.

Lección #4 - Otros Teoremas

Estas notas van dirigidas mayormente a estudiantes de Alto Rendimiento que se preparan con esmero para enfrentar las diferentes competencias convocadas por las matemáticas.

1 ·- En todo $\triangle$ se cumple que: $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b \longrightarrow$ Teorema de la desigualdad triangular.

2 ·- En todo $\triangle$ se cumple que: el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados es paralelo al tercero y mide su mitad $\longrightarrow$ Teorema de la paralela media de un $\triangle$.

3·- Si dos bisectrices de un $\triangle$ tienen igual longitud $\Longrightarrow$ el $\triangle$ es isósceles $\longrightarrow$ Teorema de Steiner

4 ·- La suma de las distancias desde un punto interior de un $\triangle$ equilátero a los lados del $\triangle$ es = a la longitud de su altura $\longrightarrow$ Teorema de Viviani

5·- Si sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un $\triangle ABC$ se construyen, por fuera, los $\triangle$ equiláteros ABC' y $CAB' \Longrightarrow \overline{BB'} = \overline{CC'}$

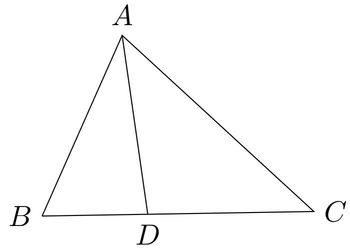
6 ·- Si G es el baricentro de un $\triangle ABC$ y por G se traza una recta que corte a los 3 lados $\Longrightarrow \overline{AX} + \overline{BZ} = \overline{CY}$, siendo $\overline{AX}$, $\overline{BZ}$ y $\overline{CY}$ perpendiculares desde A, B, C a la recta.

7·- Las proyecciones de un punto de una circunferencia sobre los lados de un $\triangle$ inscrito en dicha circunferencia determinan una recta $\longrightarrow$ Recta de Simpson.

8 ·- Circunferencia de los 9 puntos $\longrightarrow$ Es la que pasa por los puntos medios de cada lado, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices al ortocentro de un $\triangle$. El centro de esta circunferencia es el punto medio desde el ortocentro al centro de la circunferencia circunscrita.

9 ·- Triángulo pedal $\longrightarrow$ Es el $\triangle$ determinado por los pies de las alturas de un $\triangle$. El ortocentro del $\triangle$ coincide con el incentro del $\triangle$ pedal.

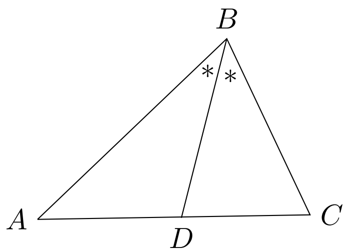
10 ·- Teorema de Stewart: Sea $\overline{AD}$ una ceviana cualquiera...



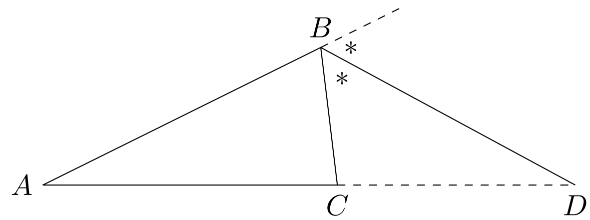
$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} = \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BC}$$

Para su demostración, trace la altura desde A y aplique reiteradas veces el teorema de Pitágoras

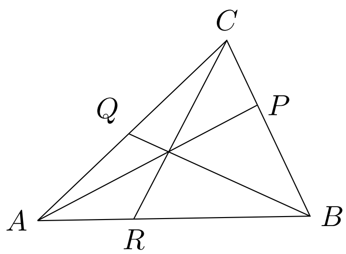
11 ·- Teorema de la bisectriz interior y exterior de un $\triangle$



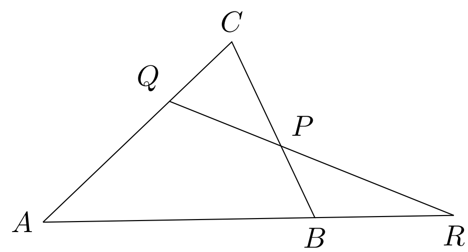
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$$



12 ·- Teorema de Ceva y Menelao



$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1$$



13 ·- Teorema de Pascal: En todo hexágono inscriptible sin lados opuestos paralelos, las intersecciones de los lados opuestos determinan 3 puntos alineados

14·- Desigualdad de Euler: $R \geq 2r$ con igualdad si el $\triangle$ es equilátero. $R \to$ circunradio, $r \to$ inradio

15 ·- Cálculo de áreas:

- $\triangle : A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{a \cdot b \operatorname{sen} \gamma}{2} = \rho r = \dfrac{abc}{4R} = \sqrt{\rho(\rho - a)(\rho - b)(\rho - c)}$ (Herón)

  a, b, c lados del $\triangle$, $h \to$ altura del lado b
  $\gamma \to$ ángulo opuesto al lado c
  $\rho \to$ semiperímetro del $\triangle$

- Cuadrilátero: $A = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} \operatorname{sen} \sigma$

  d_1, $d_2 \to$ diagonales, $\quad \sigma \to \measuredangle$ formado por las diagonales

16 ·- En todo paralelogramo la suma de los cuadrados de sus lados multiplicados por dos es = a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

17·- Teorema de Varignon: Al unir los 4 puntos medios de cada lado de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo.

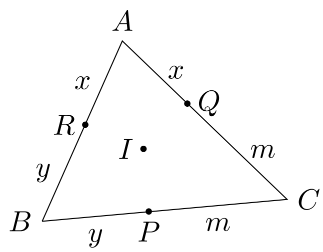
Algunos lemas necesarios

18 ·- La distancia del circuncentro a uno de los lados de un $\triangle$ tiene la mitad de la longitud del segmento que une al ortocentro del $\triangle$ con el vértice opuesto al lado.

19 ·- Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ en $N \Longrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2$

20 ·- Si $\overline{AA_1} \perp \overline{BB_1} \Longrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$, con $\overline{AA_1}$ mediana de a y $\overline{BB_1}$ mediana de b en un $\triangle ABC$ (Esto se prueba aplicando 19)

21 ·- Lema de Raví: En $\triangle ABC$, I es el incentro, P, Q, R puntos de tangencia del incírculo con los lados del $\triangle \Longrightarrow$

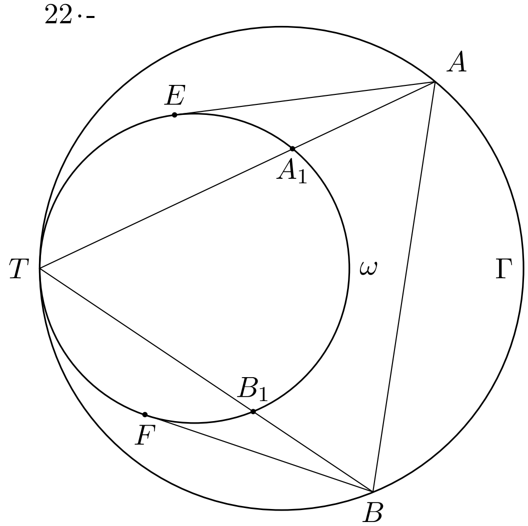


$\overline{AR} = \overline{AQ} = x$, $\overline{BR} = \overline{BP} = y$, $\overline{CP} = \overline{CQ} = m$

$\therefore a = y + m$, $b = m + x$, $c = x + y$

$\Longrightarrow m = \dfrac{1}{2}(a + b - c)$, $y = \dfrac{1}{2}(c + b - b)$, $x = \dfrac{b + c - a}{2}$

22 ·-



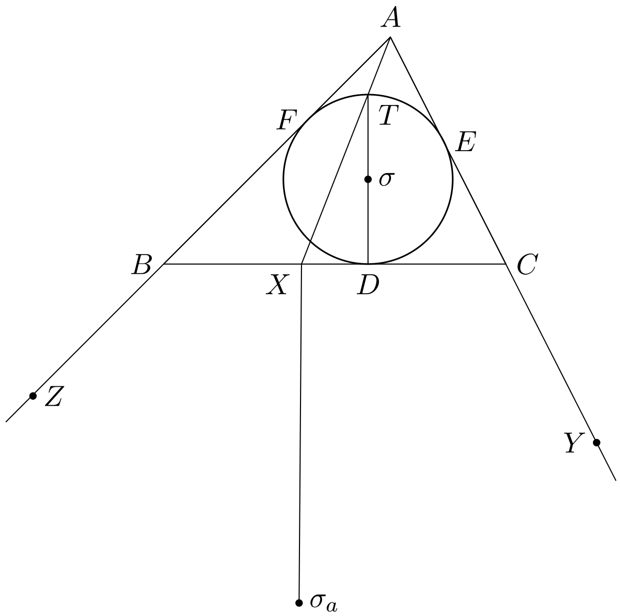
Si ω y Γ son dos circunferencias tangentes internas en T; A y B son puntos de Γ, $A_1 = \overline{TA} \bigcap \omega$ y $B_1 = \overline{TB} \bigcap \Gamma \Longrightarrow$

$$\frac{\overline{TA}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} \text{ siendo } \overline{AE} \text{ y } \overline{BF} \text{ tangentes a } \omega$$

- Vea que $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB}$
y por potencia de un punto

$$\overline{AE}^2 = \overline{AA_1} \cdot \overline{AT}$$
$$\overline{BF}^2 = \overline{BB_1} \cdot \overline{BT}, \text{ etc ...}$$

23·-



Si D, E, F puntos de tangencia del incírculo de centro σ en $\triangle ABC$. Si $\overline{DT}$ es diámetro; recta $\overrightarrow{AT}$ corta BC en $X \Longrightarrow \overline{BD} = \overline{CX}$

Demostración:

$2\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{AB} - \overline{AC}$ por 21)
$= \overline{BF} + \overline{BZ} + \overline{XD}$
$= \overline{FZ} + \overline{XD} = \overline{EY} + \overline{XD}$
$= \overline{EC} + \overline{CY} + \overline{XD} = \overline{DC} + \overline{XC} + \overline{XD}$
$= 2\overline{CX}$

Z y Y puntos de tangencia del excírculo de A con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

24, 25, 26 ... pueden ser sugerencias de los amigos de la matemática.

Lección #5

Comenzamos con la entrega de notas relacionadas con la Teoría de Números (TN) y el álebra. Aquí va a haber para todos los gustos, desde notas trilladas en nuestra enseñanza media hasta notas necesarias para alumnos de alto rendimiento.

1 ·- Un # cualquiera puede expresarse en el sistema decimal como suma de potencias de base 10. Por ejemplo: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$

2·- Un # lo llamamos Cuadrado Perfecto cuando su raíz cuadrada es un número entero $(0, 1, 4, 9, 16, ..., n^2)$. Vea que la diferencia de dos (CP) consecutivos es igual a la suma de las raices cuadradas de ambos # ejemplo: $49 - 36 = 13 = 7 + 6$

3·- Múltiplos y Divisores de un #. Ejemplo: Múltiplos de 6: $0, 6, 12, 18, ...$ Divisores de 24: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 24$.

4 ·- Números Primos: Son los que poseen 2 divisores $(2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)$. Números Primos entre sí: Son aquellos que solo tienen al uno como divisor común. Ejemplo: 3 y 10, 11 y 17, 4 y 9, 5, 8 y 21 ...

5 ·- Máximo Común Divisor (`mcd`): De todos los divisores comunes de dos o varios #, el mayor es el `mcd`. Ejemplo: $\mathtt{mcd}(24, 32) = 8$.

Mínimo Común Múltiplo (`mcm`): De todos los múltiplos comunes de dos o varios #, el menor es el `mcm`. Ejemplo: $\mathtt{mcm}(8, 10) = 40$

¿Cómo determinar el (`mcd`) y el (`mcm`) entre varios números?

Ejemplo: Sean $A = 30600$, $B = 4340$, $C = 2674200$

o sea $A = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19$, $B = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$, $C = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 19^2 \cdot 37$

$\Longrightarrow \mathtt{mcd}(A, B, C) = 2^2 \cdot 5 = 20$ (Vea que se toman solo las bases comunes de las potencias elevadas al menor exponente)

$\mathtt{mcd}(B, C) = 2^2 \cdot 5 = 20$

$\mathtt{mcd}(A, C) = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 19 = 3800$

$\mathtt{mcm}(A, B, C) = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 37$ (Vean que se toman todas las bases de las potencias y entre las comunes la de mayor exponente)

$\mathtt{mcm}(A, B) = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31$

6 ·- Reglas de divisibilidad: Un # es divisible por ...

2− si su última cifra es par o es = 0

5− si su última cifra es 0 o 5

10− si su última cifra es = 0

3− si al sumar todas sus cifras se obtiene un múltiplo de 3

9− si al sumar todas sus cifras se obtiene un múltiplo de 9

4− si las dos últimas cifras del # conforman un múltiplo de 4

$8-$ si las tres últimas cifras del # conforman un múltiplo de 8

$11-$ cuando al restar los dos resultados de sumar las cifras de orden par y las de orden impar, se obtiene un múltiplo de 11, veamos...
$\overline{abcde}$ $\quad S_1 = b + d \quad S_2 = a + c + d \quad |S_1 - S_2| = 11k$

$6-$ cuando es divisible por 2 y 3 a la misma vez

$12-$ cuando es divisible por 3 y 4 a la misma vez

$15-$ cuando es divisible por 3 y 5 a la misma vez

$36-$ cuando es divisible por 4 y 9 a la misma vez

Vea que 2 y 3, 3 y 4, 3 y 5, 4 y 9 son # primos entre sí
Ejemplo: 1536 es divisible por: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, ..., 1536$
no es divisible por: $5, 10, 9, 11, 36, ...$

$7-$ cuando separamos su última cifra y multiplicándola por 2, dicho resultado se le resta al # que resultó de suprimir la última cifra al # original, obteniendo un múltiplo de 7
Ejemplo: $51492 : 2 \cdot 2 = 4$, $5149 - 4 = 5145$, $5 \cdot 2 = 10$, $514 - 10 = 504$, $4 \cdot 2 = 8$
$50 - 8 = 42 \Longrightarrow 51492$ es múltiplo de 7

Ahora existe una regla general que nos permite obtener la regla de divisibilidad de cualquier # primo. En cualquier caso debemos separar la última cifra del # y multiplicarlo por un #n n y luego realizar el mismo algoritmo que la regla del 7. El problema es ver quién es n.

Debemos buscar qué dígitos multiplicados por el # al cual le estamos investigando la regla de divisibilidad , da como resultado un # cuya última cifra es = 1. Del resultado de este producto nos interesa solo las cifras que queden a la izquierda del 1, y este será el valor de n.

Ejemplo Regla del 97: $97 \cdot 3 = 291 \Longrightarrow n = 29$
Sea 12804: $4 \cdot 29 = 116$, $1280 - 116 = 1164$, $4 \cdot 29 = 116$, $116 - 116 = 0$
$\Longrightarrow 12804$ es divisible por 97

$- \cdot - \cdot -$

7·- Divisibilidad: El número natural n es un divisor del número natural m si existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $m = nx$ y se escribe $n \mid m$ o $m \vdots n$. Se lee n divide a m o m es múltiplo de n

- Para todo $n \in \mathbb{Z}_+$; $1 \mid n$ y $n \mid n$
- Si $a \mid b$ y $a \mid c \Longrightarrow a \mid b \pm c$
- Si $a \mid b \Longrightarrow a \mid bc$; $\forall c \in \mathbb{Z}$
- Si $a \mid b$ y $b \mid c \Longrightarrow a \mid c$
- Si $a \mid b$ y $a \mid c \Longrightarrow a \mid (bx + cy)$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

- Si $a \mid b$ y $b \mid a \Longrightarrow a = \pm b$

- Si $a \mid b$, $a > 0$, $b > 0 \Longrightarrow b \geq a$

- Dado un polinomio $P = p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} \cdot p^{\alpha_3} \cdot \cdots \cdot p^{\alpha_n}$ decimos que la cantidad de divisores D de P es $D = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdot \cdots \cdot (\alpha_n + 1)$

- Sea p primo tal que $p \mid ab \Longrightarrow p \mid a$ o $p \mid b$

- Todo # primo mayor que 3 puede expresarse como $4n \pm 1$; $6k \pm 1$ con $n, k \in \mathbb{N}^*$

8·- `mcd` y `mcm`. Conveniemos que $(a, b) = \texttt{mcd}(a, b)$ y $[a, b] = \texttt{mcm}(a, b)$

- Si $a \mid b$ y $a \mid c \Longrightarrow a \mid (b, c)$

- $(ma, mb) = m(a, b)$ $\forall m \in \mathbb{Z}_+$, $a, b \in \mathbb{N}$

- $(a, b) = (a \pm b, a) = (b, b \pm a)$

- Si $(m, n) = d \Longrightarrow m = ad, n = bd$; $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$

- $(a, b) = \dfrac{ab}{[a, b]}$ y $[a, b, c] = \dfrac{(a, b, c) \cdot abc}{(a, b)(b, c)(c, a)}$

9·- Congruencia: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow$ "a" es congruente con "b" módulo "m" ($a \equiv b \pmod{m}$) si a y b dejan el mismo resto al dividirlos por "m"

- $a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow a - b$ es divisible por m

- Si $a, b, c, d, k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$ y $a \equiv b$, $c \equiv d \pmod{m} \Longrightarrow$

  · $a + c \equiv b + d$, $a - c \equiv b - d$, $ac \equiv bd$, $ka \equiv kb \pmod{m}$
  · $a^n \equiv b^n \pmod{m}$
  · $a : k \equiv b : k \pmod{m}$ si $(k, m) = 1$ y $a = kc$ y $b = kd$

- $a \equiv a \pmod{m}$

- Si $a \equiv b \Longrightarrow b \equiv a \pmod{m}$

- Si $a \equiv b$ y $b \equiv c \Longrightarrow a \equiv c \pmod{m}$

- Si $a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow (a, m) \equiv (b, m) \pmod{m}$

- Si $ax \equiv ay \pmod{m}$ y $(a, m) = 1 \Longrightarrow x \equiv y \pmod{m}$

9·- Teorema de Fermat: Sea p primo y $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n^p \equiv n \pmod{p}$
Pequeño teorema de Fermat:
Sea p primo, $a \in \mathbb{Z}_+$; $p \nmid a \Longrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Teorema de Euler: Sean $a, m \in \mathbb{N}$; $(a, m) = 1 \Longrightarrow a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ donde $\phi(m)$ es el indicador y nos da la cantidad de # primos con m, no mayores que él tal que $\phi(p) = p - 1$ siendo p primo.

11, 12, 13, ..., pueden ser sugerencias de los amigos lectores.

Lección #6

El álgebra es una de las disciplinas insigneas dentro del estudio de las matemáticas. En estas notas tenemos en cuenta el trabajo con polinomios, ecuaciones, desigualdades y funciones entre tantas líneas que contempla este tema.

1·- Productos Notables:

A los más conocidos incorporamos estos de gran aplicación

- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^{\pm}b^3$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$
- $(a+b)(b+c)(c+a) = a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + 2abc$

2·- Factorización: Al factor común, diferencia de cuadrados y trinomio agregamos otras formas...

- Factor común por agrupamiento, ejemplo:
  $ab + ac + mb + mc = a(b+c) + m(b+c) = (b+c)(a+b)$
- Suma y Diferencia de Cubos
  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- Otras sumas
  ejemplo 1) $a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + 2abc$
  $= a^2b + ab^2 + a^2c + abc + abc + b^2c + ac^2 + bc^2$
  $= ab(a+b) + ac(a+b) + bc(a+b) + c^2(a+b)$
  $= (a+b)(ab + ac + bc + c^2)$
  $= (a+b)[a(b+c) + c(b+c)]$
  $= (a+b)(b+c)(a+c)$

  ejemplo 2) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
  $= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ ¿por qué?

  ejemplo 3) $a^4 + 4$
  $= a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2$
  $= (a^2+2)^2 - 4a^2$
  $= (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$

3·- Polinomios

- Teorema del resto: Al dividir un polinomio de grado n por un binomio de la forma $(x-a) \Longrightarrow P(x) = (x-a)Q(x) + R$, donde R es un # real
  Si $R = 0 \Longrightarrow x - a \mid P(x)$ y "a" es un divisor del término independiente de $P(x)$

- Teorema de Bezout: El resto R en la nota anterior es igual al valor de $P(x)$ para $x = a$, o sea $R = P(a)$. Ver regla de Ruffini

- $P(x) = x^n - a^n$ siempre es divisible por $(x - a)$, $n \in \mathbb{N}$

- $P(x) = x^n - a^n$ es divisible por $(x + a)$, si n es par

- $P(x) = x^n + a^n$ es divisible por $(x + a)$, si n es impar

- Un # x_0 es la raíz de $P(x) \Longleftrightarrow x - x_0 \mid P(x)$

- Teorema de Vieta
  Sea $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$
  con raíces $x_1, x_2, ..., x_n$ cumple con:
  $x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = -a_1$
  $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n = a_2$
  $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3$
  .
  .
  .
  $$\begin{aligned} x_1x_2x_3 \cdots x_n &= -a_n \text{ (si } n \text{ es impar)} \\ &= a_n \quad \text{(si } n \text{ es par)} \end{aligned}$$

  En particular $P(x) = x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$
  $$x_1 + x_2 = -p \text{ y } x_1x_2 = q$$

  y en $ax^2 + bx + c = 0$ la ecuación tiene 2 raíces reales si $D > 0$
  no tiene raíces reales si $D < 0$
  tiene una sola raíz si $D = 0$

  $$D = b^2 - 4ac \text{ y } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

3·- Desigualdades. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Si $a < b \Longrightarrow a \pm c < b \pm c$

- Si $0 < a < b \Longrightarrow a^n < b^n$

- $a < b < 0 \Longrightarrow a^n < b^n \Longleftrightarrow n$ es impar

- si $a < b$ y $c > 0 \Longrightarrow ac < bc$

- si $a < b$ y $c < 0 \Longrightarrow ac > bc$

- $a^2 \geq 0$

- Si a, b tienen suma constante $\Longrightarrow ab$ es máximo si $a = b$

$- \cdot - \cdot -$

- $\mid x \mid \geq 0$ con $= \Longleftrightarrow x = 0$

- $| \; x \; | \geq x$ con $= \Longleftrightarrow x \geq 0$
- $| \; x \; | = | -x \; |$
- $| \; xy \; | = | \; x \; || \; y \; |$
- $| \; x \; | \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$
- $| \; x \; | \geq a \Longleftrightarrow x \geq a$ o $x \leq -a$
- $| \; x^2 \; | = | \; x \; |^2 = x^2$
- $| \; a + b \; | \leq | \; a \; | + | \; b \; |$ con $= \Longleftrightarrow ab = 0$
- $| \; a - b \; | \geq | \; a \; | - | \; b \; |$ con $= \Longleftrightarrow ab = 0$

4·- Desigualdades Notables

- Relación entre las medias: $R \geq A \geq g \geq H$, o sea,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_1^2 + ...a_n^2}{n}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=i}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Raíz cuadrada de la media aritmética de los a_i	$\geq$	Media aritmética	$\geq$	Media geométrica	$\geq$	Media armónica

siendo $a_1, a_2...a_n > 0$
Con $= \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

En particular
para $a, b, c > 0$: $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \dfrac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}$

- Cauchy Schwartz
$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2$
siendo $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2..., b_n \in \mathbb{R}$
Con $= \Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$
Además se cumple: $\dfrac{a_1^2}{x_1} + \dfrac{a_2^2}{x_2} + ... + \dfrac{a_n^2}{x_n} \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$
siendo $a_1, a_2, ...a_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$
Esta forma es muy "atractiva" y se conoce como Desigualdad de Arthur Engels

- Reacomodo
$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\gamma_i} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$

con $a_i \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$

$b_i \geq b_2 \geq ... \geq b_n$, $b_i \in \mathbb{R}$

$\gamma = \{1, 2, ...n\}$ cualquier permutaciín de a_i,b_i

- Shebychev
  - Si $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \in \mathbb{R}$
    $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$
  - Si $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \in \mathbb{R}$
    $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \geq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

    Con = si uno de los a_i o b_i es constante

* Estas 2 desigualdades son también muy "atractivas", es posible que vistas así no se entiendan bien, pero en la Lección #7 las veremos. Igualmente existen otras desigualdades notables que en otro momento notificaremos. Por ahora estas que mostramos resultan una herramienta poderosa para resolver problemas de desigualdades.

Continuamos próximamente.